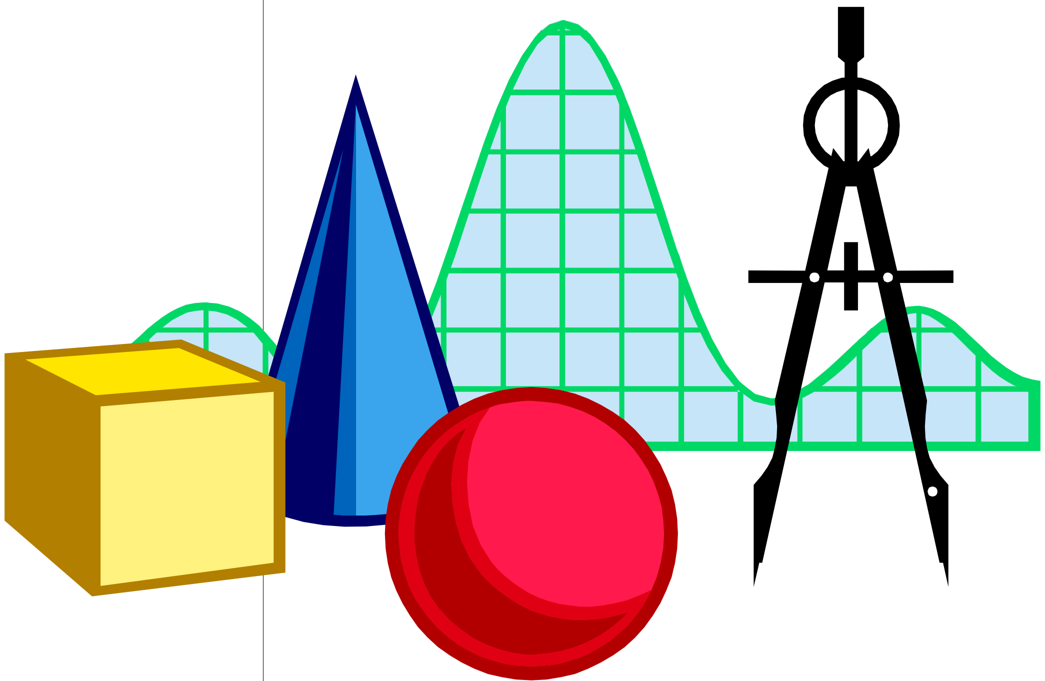
Sbírka maturitních příkladů z matematiky

Mgr. Marie Kubíčková
Mgr. Radek Nowak



1. Úpravy výrazů

Upravte a udejte podmínky existence výrazů

1.1. $\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}}=$,

1.2. $\left[\dfrac{a^3-ab^2+b^2}{(a-b)^3}-\dfrac{b}{a-b}\right]\cdot\left[\dfrac{a^2-2ab+2b^2}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{b}{a}\right]=$,

1.3. $\left[\left(\dfrac{3}{a-b}-\dfrac{3a}{b^3-a^3}\cdot\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right):\dfrac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}\right]\cdot\dfrac{2}{a+b}=$,

1.4. $\left\{\left[1+\dfrac{1+\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}{1-\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\right]\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{a^2}{x^2}}\right\}+\dfrac{a^2-x^2}{a-x}=$,

1.5. $\dfrac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\cdot\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right]=$,

1.6. $\left(-\sqrt[3]{x^{0,4}}\right)^5+\left(-2x^{0,1\cdot\frac{5}{3}}\right)^4-x^{-2}\left(\dfrac{-3x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{3x^{-4}}}\right)^2=$,

1.7. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a-b}{a+b}\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}}\right)^4:\left(\sqrt[4]{\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)\sqrt[3]{\dfrac{a+b}{a-b}}}\right)^5=$,

1.8. $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}{m-n}=$,

1.9. $\left[\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}\right)^{\frac{1}{4}}:\left(\dfrac{2a^{-1}}{\sqrt[4]{2a^4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[\dfrac{3\sqrt[4]{a^{\frac{5}{2}}}\cdot(6a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{27}}\right]^{-1}=$,

1.10. $\left(\dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}=$,

1.11. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=$,

1.12. $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}+\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=$.

2. Funkce

2.1. Určete definiční obor funkcí

a) $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{\log(x-2)}}$,

b) $y=\sqrt{4-x^2}+\log\dfrac{x-5}{x+1}$,

c) $y=1+\sqrt{\log(x^2+1)}$,

d) $y=\sqrt{\cos x}$,

e) $y=\sqrt{\log(\cos x)}$,

f) $y=\log(\cos x)$,

g) $y=\sqrt{6x^2-7x+2}$.

2.2. Sestrojte grafy funkcí

a) $y=x^2$, $y=x^{-2}$, $y=x$, $y=x^{-1}$,

b) $y_1=\dfrac{2}{x}+3$, $y_2=\dfrac{2}{x-1}$,

c) $y=|2x+3|-|x-1|$,

d) $y=x^2-x\cdot|x-2|-4$,

e) $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1$, $x\in\langle-2\pi;2\pi\rangle$,

f) $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$,

g) $y=2\sin x+1$,

h) $y=\frac{1}{2}\sin 2x$,

i) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

2.3. Určete vlastnosti funkcí a sestrojte jejich graf

a) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$,

b) $y=|2x|\cdot\frac{1}{x}$,

c) $y=\frac{1}{2}(|x+1|+|x-1|)$,

d) $y=\log_3(-x)$,

e) $y=2^{x-1}$,

f) $y=|2-\log x|$,

g) $y=\left|\frac{x+3}{x-1}\right|$,

h) $y=|2^x-3|$,

i) $y=1+\log x$.

2.4. Určete inverzní funkci k funkci

$$y=2x^2,\ x\in\langle 1;4\rangle.$$

2.5. Z průběhu exponenciální a logaritmické funkce nahraďte znak „$\otimes$“ znaménkem nerovnosti tak aby výrok byl pravdivý

a) $0{,}75^{\frac{1}{2}}\otimes 1$,

b) $1{,}2^{-0.3}\otimes 1{,}2^{-0{,}7}$,

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^m>\left(\frac{2}{3}\right)^n\Rightarrow m\otimes n$,

d) $\log_{\frac{1}{3}}8.3\otimes 0$,

e) $\log_2 3\otimes\log_2 5$,

f) $\log_{0,7}m<\log_{0,7}n\Rightarrow m\otimes n$.

2.6. Určete všechna $a\in R$, pro která je funkce $y=\left(\frac{a}{a+2}\right)^x$ rostoucí a pro která klesající.

2.7. Určete, pro která $s\in R$ je definovaná funkce $y=\left(\frac{2-s}{3}\right)^x$. Určete pro která s je funkce rostoucí a pro která klesající.

2.8. Logaritmujte výraz (dekadický logaritmus) $x=\frac{r^3}{2-r}\cdot\sqrt[3]{\frac{g}{\sqrt{t^2-r^2}}}$.

2.9. Určete, jak dlouho a z jaké výšky padá těleso volným pádem, jestliže v poslední sekundě svého pádu urazí jednu třetinu celkové dráhy.

2.10. Odvoďte $\sin 3\alpha$ a $\cos 3\alpha$ pomocí vhodných goniometrických vztahů.

2.11. Vypočtěte hodnotu výrazu $\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2x\right)}{\cos 2x-\cos^2 x}$, je-li $x=\frac{-\pi}{4}$.

2.12. Bez použití tabulek a kalkulátorů určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí, je-li $\sin x=0{,}6$, $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

3. Rovnice

Řešte v R rovnici:

3.1. $3e^{\ln x}-2e^{\ln 2x}+4e=0$,

3.2. $2^{x-2}-3^{5+2x}=3^{2x-3}-2^{2+x}$,

3.3. $\frac{\log(35-x^2)}{\log(5-x)}=3$,

3.4. $\log(x+1)^2\cdot\log\sqrt{x+1}-\log\frac{1}{x+1}=2$,

3.5. $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x=0$,

3.6. $\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x=2\frac{1}{6}$,

3.7. $3\sin x-2\cos x=1$,

3.8. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$,

3.9. $2\sin^4 x-\sin^2 x=0$,

3.10. $\sqrt{7\sin x-2}=\sqrt{2}\cos x$,

3.11. $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$,

3.12. $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}}=\sqrt[3x-7]{8^{x-3}}$,

3.13. $\sqrt{2x-3+\sqrt{3x+4}}-\sqrt{2x-3-\sqrt{3x+4}}=2$,

3.14. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$,

3.15. $\sqrt{x+\frac{3}{2}}+\sqrt{x-\frac{1}{2}}=2$,

3.16. $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$,

3.17. $|2x+1|-|2x|=2x-1$,

3.18. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-1{,}5=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$,

3.19. $\frac{a+b}{2a-ax+2-x}+\frac{1}{a+1}=\frac{b+1}{2x-x^2}$,

3.20. Parník potřeboval na plavbu dlouhou 48 km proti proudu a 48 km zpět dohromady 5 hodin. Jakou rychlostí by jel parník po klidné vodě , byla-li rychlost proudu 4 $\mathrm{km.h^{-1}}$?

4. Rovnice s parametrem

Řešte v R rovnici s neznámou *x* a parametrem:

4.1. $\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}-\frac{1}{x}}-\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{x}}=\frac{2m}{x^2-m^2}$,

4.2. $1-\frac{a+x}{a-x}=\frac{1-2a}{a+1}$,

4.3. $\frac{kx+1}{x-2}=\frac{kx-1}{x+2}$,

4.4. $\frac{2-a}{a}=\frac{2}{x-1}+3a$,

4.5. $(m+1)x^2+(5m+2)x+(6m+1)=0$.

5. Soustavy rovnic

Řešte v R^2 soustavu

5.1.
$$\begin{aligned} x-2y+z&=0,\\ 3x-5y-2z&=-3,\\ 7x-3y+z&=16. \end{aligned}$$

5.2.
$$\begin{aligned} x-2y+2z&=-9,\\ 3x-5y+4z&=10,\\ 5x+12y+6z&=29. \end{aligned}$$

5.3.
$$\begin{aligned} 3^{\log x}+4^{\log y}&=4,\\ 3^{2\log x}-4^{2\log y}&=8. \end{aligned}$$

5.4.
$$\begin{aligned} a^2x+ay&=a,\\ x+y&=1. \end{aligned}$$

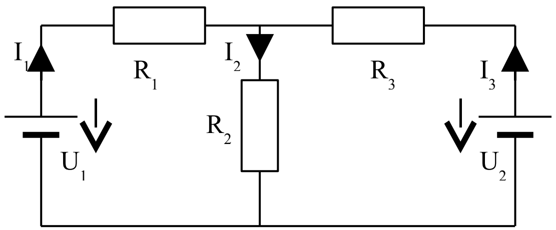
5.5.
$$\begin{aligned} \frac{4}{x+2y}-\frac{1}{x-2y}&=1,\\ \frac{20}{x+2y}+\frac{3}{x-2y}&=1. \end{aligned}$$

5.6. Je dána soustava 2 rovnic o dvou neznámých $x,y\in R$ s parametrem $m\in R$. Určete hodnoty parametru m tak, aby průsečík grafů byl ve III. kvadrantu, $2x+3y=m\wedge 2x-y=1$.

5.7. Po okruhu dlouhém 2550 m jezdí dva motocykly takovými rychlostmi, že se potkávají každou minutu, jezdí-li proti sobě a dohánějí se každých pět minut, jezdí-li týmž směrem. Určete jejich rychlosti.

5.8.
$$\begin{aligned} 4x^2-4x&=y^2,\\ 2x+y-1&=0. \end{aligned}$$

5.9. Vypočtěte I_1,I_2,I_3 v elektrickém obvodu jeli dáno $U_1=250\,\mathrm{V}$, $U_2=300\,\mathrm{V}$, $R_1=100\,\Omega$, $R_2=50\,\Omega$, $R_3=75\,\Omega$.



6. Nerovnice

Řešte v R nerovnici nebo soustavu

6.1. $\big||x+2|-|x|\big|\le 2x$,

6.2. $|x+2|-x\ge 3-|x-3|$,

6.3. Zobrazte a zapište intervaly množiny $M_1 = \{x \in R; |x-2| < 5\}$ a $M_2 - \{x \in R; |x+3| \geq 1\}$.

6.4. $3x - 1 < |x| < 3x + 1$

6.5. Řešte graficky $\sin x > \cos x \wedge \operatorname{tg} x \leq 3$

7. Zobrazení

7.1. Sestrojte ΔABC, je-li dáno $v_a = 5$ cm, $a{:}b{:}c = 2{:}3{:}4$. Určete typ zobrazení, který využijete při řešení.

7.2. V rovnoramenném trojúhelníku o základně $z = 80$ cm a ramenech $r = 72$ cm vypočtěte výšky.

7.3. Sestrojte ΔABC, je-li dáno $a{:}b{:}c = 4{:}5{:}6$, $t_c = 7$ cm.

7.4. Jsou dány kružnice $k_1 = (S_1;\ 2\text{ cm})$ a $k_2 = (S_2;\ 4\text{ cm})$, $|S_1S_2| = 8$ cm. Najděte body z nichž jsou obě kružnice vidět pod stejným zorným úhlem.

7.5. Vypočtěte délku společné vnitřní tečny kružnic $k_1 = (S_1;\ 2\text{ cm})$ a $k_2 = (S_2;\ 4\text{ cm})$, $|S_1S_2| = 8$ cm.

8. Rovinné obrazce

8.1. Sestrojte velikosti úsečky $\sqrt{17}$ pomocí Eukleidových vět a Pythagorovy věty.

8.2. Určete velikosti těžnic pravoúhlého trojúhelníku, je-li odvěsna $a = 24{,}5$ cm a $\alpha = 24°30'$.

8.3. Pomocí a) Pythagorovy věty, b) Eukleidovy věty o výšce vypočítejte poloměr mostního kruhového oblouku o rozpětí $2a = 80\,\text{m}$ a výšce $v = 20\,\text{m}$.

8.4. Sestrojte úsečku délky $x = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$, je-li $a > b$.

8.5. Vypočítejte délky stran pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou c, je-li $t_a = 10\,\text{cm}, t_b = 4\sqrt{10}\,\text{cm}$.

8.6. V trojúhelníku ABC platí $\alpha : \beta = 1 : 2,\ a : b = 2 : 3$. Určete jeho vnitřní úhly.

8.7. Vypočtěte výšku kopce, na jehož vrcholu je rozhledna vysoká $25\,\text{cm}$. Její vrchol a patu je vidět ze stanoviště v údolí pod výškovými úhly $\alpha = 29°30'$ a $\beta = 27°30'$.

8.8. Ze všech trojúhelníků s danou stranou a a daným úhlem α ležícím proti ní najděte trojúhelník s největším obvodem.

8.9. Sílu $F = 400N$, která působí na hmotný bod A, rozložte na složky F_1, F_2 tak aby úhel $\vec{F}\vec{F}_1 = 69°$, $\vec{F}\vec{F}_2 = 74°$.

8.10. Tři síly, jejichž velikosti jsou v poměru $9{:}10{:}17$ působí v rovině v jednom bodě tak, že jsou v rovnováze. Určete velikosti úhlů mezi jednotlivými silami.

8.11. Kružnice je rozdělena na dva oblouky, jejichž délky jsou v poměru $1{:}2$. V jakém poměru jsou obsahy obou úsečí ?

8.12. Vypočtěte obsah pravidelného dvanáctiúhelníku, je-li délka jeho nejkratší úhlopříčky $u = 15$ cm.

8.13. Určete celá čísla udávající velikosti stran pravoúhlého trojúhelníku, jehož obvod i obsah jsou vyjádřeny týmž číslem.

8.14. Výška a rovnoběžné strany lichoběžníku jsou v poměru $2{:}3{:}5$, obsah je 512 cm^2. Určete velikost výšky a základen.

8.15. V pravidelném n-úhelníku je velikost vnitřního úhlu $\alpha = 108°$ a poloměr kružnice vepsané je $r = 5$ cm. Určete tento n-úhelník a vypočítejte jeho obsah a velikost jeho strany.

9. Tělesa

9.1. Podstavou kosého hranolu je trojúhelník, v němž poloměr kružnice opsané je $r = 15\,\text{cm}$, úhly $\alpha = 52°10', \beta = 30°$. Pobočná hrana $h = 13\,\text{cm}$ svírá s rovinou podstavy úhel $\varphi = 73°20'$. Vypočtěte objem hranolu.

9.2. Kvádr má objem $7{,}5\,\text{dm}^3$, jeho rozměry jsou v poměru $3 : 4 : 5$. Vypočtěte jeho povrch a tělesovou úhlopříčku.

9.3. Kolmý trojboký hranol, jehož podstava je pravoúhlý trojúhelník, má objem $300\,\text{cm}^3$, obsah největší stěny $S_1 = 130\,\text{cm}^2$, tělesová výška $10\,\text{cm}$. Vypočtěte délky podstavných hran.

9.4. Objem pravidelného 6-tibokého hranolu je $V = 540 \cdot \sqrt{3}\left[j^3\right]$. Délka podstavné hrany a k délce výšky v je v poměru $3:5$. Vypočtěte povrch hranolu.

9.5. Pravidelný čtyřboký jehlan, jehož podstavné a boční hrany mají tutéž délku, má objem V . určete délky hran a povrch tělesa.

9.6. Pravidelný čtyřstěn má hranu a. Vypočtěte jeho výšku, objem , povrch a odchylku hrany od roviny stěny, v níž neleží.

9.7. V nerotačním kuželi je nejdelší strana $s_1 = 16\,\mathrm{cm}$ a nejkratší $s_1 = 16\,\mathrm{cm}$.

9.8. Podstavou kosého čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je čtverec o straně $a = 20\,\mathrm{cm}$, výškou je pobočná hrana $|VD| = 21\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte povrch jehlanu.

9.9. Rotační kužel a válec mají shodné podstavy o poloměru o poloměru r , stejné velikosti výšek i plášťů. Jak jsou vysoké? (Pozn. vyjádřete výšku v jako funkci poloměru r .)

9.10. Je dán objem $V = 9\pi\sqrt{3}\left[j^3\right]$ rovnostranného kužele. V jaké vzdálenosti x od vrcholu kužele je třeba vést řez rovinou rovnoběžnou s podstavou , která rozdělí daný kužel na dvě tělesa se stejnými objemy?

9.11. Tvrdost materiálu se zjišťuje zkouškami. Jednou z nich je Brinellova zkouška. Při ní se do testovaného materiálu tvaru rovinné desky tlačí konstantní silou po určitou dobu ocelová kulička o průměru d_1. Tím se v materiálu vytlačí prostor tvaru kolové úseče o průměru podstavy d_2.

a) Určete, do jaké hloubky byla kulička vtlačena, je-li $d_1 = 10\,\mathrm{mm}$ a $d_2 = 6\,\mathrm{mm}$?

b) Vypočtěte obsah kulového vrchlíku, který je částí hranice vytlačené kulové úseče.

9.12. Vypočtěte objem kulové vrstvy a poloměr koule, je-li dáno $\rho_1 = 7\,\mathrm{cm}$, $\rho_2 = 5\,\mathrm{cm}$ a $v = 2\,\mathrm{cm}$.

9.13. Vypočtěte objem a povrch kulové úseče, která vznikne vedením sečné roviny v kouli, o poloměru $r = 12\,\mathrm{cm}$, $4\,\mathrm{cm}$ od jejího středu.

9.14. Polokulovitá nádoba je zcela naplněná vodou. Nakloníme-li ji o $30°$, vyteče z ní $5\frac{1}{2}\,\mathrm{l}$ vody. Kolik litrů v nádobě zbývá?

9.15. Kouli je opsán rotační kužel, jehož výška se rovná šestinásobku poloměru koule.V jakém poměru jsou povrchy obou těles?

9.16. Určete objem kulové vrstvy, která vznikne z polokoule o poloměru $r = 5\,\mathrm{cm}$ odříznutím úseče o výšce $v = 1{,}5\,\mathrm{cm}$.

10. Analytická geometrie přímky a roviny

10.1. Určete úhel vektorů $\vec{u},\vec{v}$, je-li $|\vec{u}| = 5, |\vec{v}| = 8, |\vec{u} - \vec{v}| = 7$.

10.2. Určete a_1 tak, aby vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ byly lineárně závislé a vypočtěte úhel vektorů $\vec{b},\vec{c}$; $\vec{a} = (a_1,0,-9)$, $\vec{b} = (2,4,3)$, $\vec{c} = (1,2,3)$.

10.3. Určete v dané rovině vektor $\vec{v}$, který je kolmý k vektoru $\vec{u} = (5,12)$ a má velikost $|\vec{v}| = 26$.

10.4. Jsou dány body $A = [1,1]$, $B = [2,-1]$, $C = [3,2]$. Určete pomocí vektorů, zda body tvoří trojúhelník, určete délky stran a zjistěte, zda trojúhelník není pravoúhlý.

10.5. Určete vektor kolmý k vektorům $\vec{a} = (1,-2,1)$, $\vec{b} = (1,2,-2)$.

10.6. Vyjádřete vztahy mezi m, n, q tak, aby rovnice přímek $3x - 5y + 4 = 0, (2-m)x - 3ny + 3 - q = 0$ byly:

a) vyjádřením téže přímky,
b) vyjádřením dvou rovnoběžných přímek,
c) vyjádřením různoběžných přímek.

10.7. Vypočtěte obsah čtverce, jehož rovnoběžné strany leží na přímkách:

$a:\quad 12x + 5y - 11 = 0$

$b:\quad 3x - 4y + 3 = 0$

10.8. Pro které hodnoty parametrů $m,n,r\in R$ vyjadřují rovnice:

$$2mx-3ny+4r=0,$$
$$(1-3m)x+(2n+1)y-r=0,$$

tutéž přímku?

10.9. V obecné rovnici přímky $ax+8y-5=0$ určete parametr a, tak aby tato přímka pocházela průsečíkem přímek $2x-7y+21=0$ a $x=1+2t,\ y=14-3t$.

10.10. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $M=[7,4]$ a s přímkou $3x-4y+10=0$ svírá úhel $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

10.11. Dokažte, že přímky p,q jsou rovnoběžné a určete jejich vzdálenost:

$p:\quad x=1-4t,\quad y=2+4t,\ z=3+t,\ t\in R,$

$q:\quad x=-4+4r,\ y=5-4r,\ z=-r,\ r\in R.$

10.12. Zjistěte vzájemnou polohu přímky a roviny. Podle polohy pak určete buď vzdálenost nebo průsečík a úhel:

$p:\quad \overrightarrow{AB}:\quad A=[1,-1,3],\ B=[-2,3,-4],$

$q:\quad 7x-21y+15z+17=0.$

10.13. Určete průsečíky přímky a určené body $A=[-1,6,6], B=[3,-6,-2]$ se souřadnicovými osami.

10.14. Určete rovnici roviny, která je určena body $A=[1,-2,3]$, $B=[-4,5,6]$ a $C=[7,8,-9]$.

10.15. Napište rovnici roviny (parametricky i obecně), ve které leží přímka $x=1+t,\ y=1+2t,\ z=-2+2t$, a která je kolmá k rovině dané rovnicí $2x+3y-z=4$.

10.16. Určete vzájemnou polohu přímek v prostoru :

$p:\quad x=1+2t,\ y=7+t,\quad z=5+4t,\ t\in R,$

$q:\quad x=2+3r,\ y=-3-2r,\ z=-8+r,\ r\in R.$

10.17. Určete vzdálenost bodu $A=[2,2,2]$ od roviny $\rho: 2x-y-2z+12=0$.

10.18. Jaká je vzdálenost bodu $M=[7,9,7]$ od přímky $p: x=2+4t,\ y=1+3t,\ z=2t$.

10.19. Určete graficky i početně vzájemnou polohu rovin daných rovnicemi $x+y+z=12$ a $z=4$.

10.20. Napište parametrické vyjádření roviny a obecnou rovnici roviny α procházející bodem $M=[-1,-1,2]$ a kolmé k rovinám

$\rho:\quad x-2y+\ z-4=0,$

$\sigma:\quad x+2y-2z+4=0.$

10.21. Průsečnicí rovin α a β veďte rovinu γ kolmou k σ:

$\alpha:\quad x+5y-\ z+2=0,$

$\beta: 4x-\ y+3z+1=0,$

$\gamma: ax+by+cz+d=0,$

$\sigma: 2x-\ y+5z+3=0.$

11. Analytická geometrie kuželoseček

11.1. Určete odchylku tečen vedených z počátku ke kružnici $x^2+y^2-6x-2y+8=0$.

11.2. Určete nejmenší vzdálenost bodu $P=[-3,8]$ od kružnice $x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

11.3. Určete rovnici kružnice, která prochází body $A=[5,3]$, $B=[6,2]$ a střed na přímce $3x-4y-3=0$.

11.4. Napište rovnici kružnice se středem na přímce p o rovnici $3x-y-2=0$, jestliže kružnice prochází body $A=[3,1]$, $B=[1,3]$.

11.5. Napište rovnici kružnice procházející body $A=[2,3]$, $B=[4,5]$, $C=[6,-1]$. Nejprve však ověřte, zda dané body určují kružnici.

11.6. Najděte rovnici elipsy, která prochází bodem $M=[4,-1]$ a dotýká se přímky $t:\quad x+4y=10$, (osy na osách souřadnic).

11.7. Určete střed, poloosy a excentricitu elipsy o rovnici $5x^2 - 30x + y^2 + 10y + 60 = 0$.

11.8. Určete osovou rovnici elipsy, která se dotýká přímky $x + 2y = 25$ v bodě $T = [9, y_0]$.

11.9. Ohniska elipsy leží na přímce $y + 6 = 0$, jejich vzájemná vzdálenost je 2 a bod $E = [3, -1]$ je vrcholem vedlejší osy. Napište rovnici této elipsy.

11.10. Zjistěte jakou kuželosečku představuje rovnice $4x^2 + 9y^2 - 24x - 18y + 27 = 0$. Určete rovnice tečen k této kuželosečce v jejích průsečících s osou x.

11.11. Na parabole $y^2 - 10x - 2y - 9 = 0$ najděte bod, který má od přímky $x - 3y + 18 = 0$ nejmenší vzdálenost.

11.12. Do paraboly o rovnici $y^2 = 6x$ je vepsán rovnostranný trojúhelník, jehož jeden vrchol leží ve vrcholu paraboly a protější strana je kolmá k ose paraboly. Vypočtete obsah tohoto trojúhelníku.

11.13. Jak dlouhou tětivu utíná parabola $y^2 = 9x$ na přímce $3x - 7y + 30 = 0$.

11.14. Parabolický oblouk má rozpětí $l = 120\,\mathrm{m}$ a výšku $v = 90\,\mathrm{m}$. Vyjádřete rovnici parabolického oblouku.

11.15. Napište rovnici přímky, která svírá s osou x úhel $\frac{\pi}{4}$ a prochází vrcholem paraboly $2y^2 - 11x + 12y + 73 = 0$.

11.16. Napište osovou rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty mají rovnici $y = \pm\frac{x}{2}$ a její tečna rovnici $x - y - 3 = 0$.

11.17. Napište osovou rovnici hyperboly, která má souřadnice ohnisek $F_1 = [-14,5]$, $F_2 = [14,5]$ a prochází bodem $M = [6,20]$.

11.18. Zjistěte, zda rovnice $9x^2 - 16y^2 - 90x - 96y - 495 = 0$ je rovnicí hyperboly. Je-li tomu tak, určete její střed, ohniska a poloosy. Proveďte grafické zobrazení.

11.19. Napište rovnici hyperboly, která má vrcholy v ohniscích a ohniska ve vrcholech elipsy $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

11.20. Určete vzdálenost středu hyperboly h od přímky p:

$h: \; 2x^2 - 3y^2 - 8x + 6y - 1 = 0,$

$p: \; x - 2y - 3 = 0.$

11.21. Určete odchylku křivek $9x^2 + 25y^2 = 900$ a $x^2 + y^2 = 64$.

11.22. k parabole $2x^2 = 9y$ veďte tečnu rovnoběžnou s přímkou $q: \; 8x + 3y + 12 = 0$.

11.23. Určete osovou rovnici hyperboly, která má asymptotu $y = \frac{x}{2}$ a tečnu $x - y = 3$.

11.24. Poblíž železniční tratě, která opisuje parabolický oblouk o rovnici $y^2 = 150x$, vede přímá silnice o rovnici $y = 5x + 40$. Který bod tratě leží nejblíže k silnici?

11.25. Napište rovnici kružnice se středem na přímce $p: \; 5x - 7y - 8 = 0$, která se dotýká přímek $a: 2x - y = 0$ a $b: x - 2y - 6 = 0$.

12. Maticový počet

12.1. Určete součin matic

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

12.2. Najděte matici X, pro kterou platí:

$$3 \cdot \left[X + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right] = 4 \cdot \left[X - \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \right].$$

12.3. Určete matici X a její hodnost, je-li dána maticová rovnice:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \end{bmatrix} = X .$$

12.4. Ukažte, že pro dané matice A, B platí: $3A^2 + 2A - 4E = B$, kde E je jednotková matice stejného stupně jako A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 16 & 12 \\ 6 & 1 & 16 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

12.5. Řešte rovnici $X \cdot A - 4 \cdot B = 2 \cdot A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

12.6. Určete hodnost matice a její determinant:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

12.7. Řešte rovnici: $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$

12.8. Rozhodněte pomocí determinantu, pro které hodnoty a je matice

$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ singulární .

12.9. Určete číslo a tak, aby soustava měla řešení a pak soustavu řešte:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= a. \end{aligned}$$

12.10. Rozhodněte, zda daná soustava má řešení

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 11, \\ x + y - 3z &= 7, \\ 11x - 4y - 3z &= 10, \\ x - 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

13. Diferenciální počet

13.1. Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{10+x} - 3} =,$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin x}{3x} =,$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 10x + 25}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5} =,$

d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{3x-4} - \sqrt{2x+1}}{x-5} =,$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 10x + 25}{3x^2 - 2x + 5} =,$

f) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3\sqrt{x} - 6x + 2}{\sqrt{25 - x^2} + 1} =,$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x} =,$

h) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{1 - \operatorname{tg} x} =,$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2} - 2} =,$

j) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 + 5x - 7} =,$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1} =,$

l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = .$

13.2. Podle definice vypočítejte derivaci funkce $y = 2x^3$.

13.3. Derivujte funkci

a) $y = \ln\frac{\sqrt{1+x}}{x}$,

b) $axy^3 - x^2 = axy$,

c) $y = 5x^{4x}$

d) $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

e) $4x^2 + 9y^2 - 18y = 1985$.

f) $y = \ln\frac{x}{1-x^4}$,

g) , $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$,

h) $y = e^{\sqrt{\sin x}} + \mathrm{tg}^3\, 3x$,

i) $y = x^{\sin x} + \log e^{x^2} - \frac{\sin x}{1+\cos x}$,

13.4. Je dána funkce $y = \sqrt{5-x^2}$. Urči rovnici tečny v jejím bodě $T = [1, y_T]$.

13.5. V rovině jsou dány body $A = [0,3]$, $B = [4,5]$. Na ose x najděte bod M tak, aby součet vzdáleností $|AM| + |BM|$ byl co nejmenší.

13.6. Lichoběžníkové koryto nahoře otevřené má základnu i ramena dlouhé $4\,\mathrm{dm}$. Při jakém sklonu α ramen pojme co nejvíce vody a jaká bude jeho horní šířka?

13.7. Jaké rozměry musí mít uzavřená litrová válcová nádoba, má-li být spotřeba plechu na její výrobu včetně odpadu co nejmenší (předpokládejte, že plech spotřebovaný na podstavu má tvar čtverce opsaného podstavě).

13.8. Určete lokální extrémy funkce $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ a její absolutní extrémy na intervalu $\langle -2, 4\rangle$.

13.9. Určete intervaly, ve kterých je funkce $y = \frac{x}{1+x^2}$ konvexní nebo konkávní.

13.10. Vyšetřete průběh a graf funkcí:

a) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

b) $y = 1 + x + \frac{1}{3x^2}$,

c) $y = x^4 - 2x^3 - 2x^2$,

d) $y = \frac{1}{4}\left(x^3 - 3x^2 - 9x + 27\right)$,

e) $y = \frac{x^2+1}{x}$,

f) $y = x \cdot \ln x$.

13.11. Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $v_0 = 40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Za předpokladu, že $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, vypočtěte okamžitou rychlost v čase $t = 2\,\mathrm{s}$, dobu a výšku výstupu, okamžité zrychlení v čase t.

13.12. Napište rovnici tečny a normály v obecném tvaru k parabole $y = 2 - 4x - x^2$ v bodě T, kde $x_T = -3$.

13.13. Hmotný bod M se pohybuje přímočaře tak, že jeho vzdálenost od výchozího bodu O (počátek soustavy souřadnic) je kubickou funkcí času. Vyjádřete tento pohyb, víte-li, že v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ se začal bod pohybovat z bodu O a v čase $t = 10\,\mathrm{s}$ se do tohoto bodu opět vrátil, když předtím v čase $t = 4\,\mathrm{s}$ dosáhl maximální vzdálenosti $d = 48\,\mathrm{cm}$ od výchozího bodu.

13.14. Ve které bodě má křivka $y = 2x^2 + 3x - 1$ tečnu:

a) se směrovým úhlem 45°,

b) rovnoběžnou s přímkou $5x - y + 3 = 0$,

c) kolmou na přímku $x - 3y + 2 = 0$.

13.15. Napište rovnici tečny a normály $y = e^{-x}\cos x$ v bodě $T = [0, y_T]$.

13.16. Akumulátor má elektromotorické napětí U_e a vnitřní odpor R_i. Jaký vnější odpor je nutno zapojit, chceme-li ve vnějším proudovém okruhu získat největší výkon? Určete jej.

14. Integrální počet

14.1. Užitím vhodné metody integrujte

a) $\int \sin \ln x \cdot dx =$,

b) $\int \mathrm{tg}\, x \cdot dx =$,

c) $\int \cos^4 x \cdot \sin 2x \cdot dx =$,

d) $\int \mathrm{tg}^2\, x \cdot dx =$,

e) $\int e^x \sin x \cdot dx =$,

f) $\int 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx =$.

14.2. Integrujte:

a) přímou metodou $\int 2 \cdot \sin ax \cdot \cos bx \cdot dx =$,

b) substitucí $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx =$,

c) metodou per partes $\int \sin^2 x \cdot dx =$.

14.3. Ukažte, že funkce $F(x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x$ a $G(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{4}\sin^4 x$ jsou primitivní k funkci $f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x$ a najděte konstantu o kterou se liší.

14.4. Určete k $f(x) = 3 - 2x + x^3$ primitivní funkci $F(x)$ tak, aby její graf procházel bodem $B = [1,2]$.

14.5. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí:

a) $x = 0$, $y = 0$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$,

b) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$,

c) $y = 6x - x^2$, $y = 0$,

d) $f(x) = \frac{2}{1 - x^2}$, $g(x) = x^2$.

14.6. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené parabolami $y = 1 - x^2$ a $y = x^2$ okolo osy x.

15. Kombinatorika a pravděpodobnost

15.1. Kolik jedno až čtyřciferných čísel je možno sestavit z cifer $0, 2, 4, 6$, jestliže

a) každá cifra se smí vyskytovat nejvýše jednou,

b) každé číslo je dělitelné šesti?

15.2. Kolik prvků má množina, z jejichž prvků je variací třetí třídy 10-krát víc než variací druhé třídy?

15.3. Kolik je možno utvořit součinů dělitelných třemi a obsahujících libovolné tři činitele z čísel : $1,2,3,5,7,9$?

15.4. Kolik prvků je daných, když počet variací třetí třídy z nich utvořených je pětkrát větší než variací druhé třídy?

15.5. Zvýši-li se počet prvků o jednu, zvýší se počet kombinací třetí třídy o 21. Kolik je dáno prvků?

15.6. V rovině je 10 libovolně položených bodů. Kolik jimi lze určit kružnic, jestliže a) žádné 4 body neleží na kružnici, b) 6 bodů leží na jedné kružnici?

15.7. Kolik značek Morseovy abecedy lze vytvořit maximálně ze 4 prvků?

15.8. Řešte binomickou rovnici a stanovte její definiční obor:

a) $\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} = a^2, \quad a \in N$,

b) $\binom{y-1}{y-2} + \binom{y-2}{y-4} = 16$,

c) $C_3(x) + C_2(x) = 15(x-1)$,

d) $\left(\frac{\binom{x}{1} + \binom{x}{3}}{\binom{x}{2} + \binom{x}{2}} \right) = 1$,

e) $\binom{7}{1}\binom{x+2}{x} - \binom{5}{3}\binom{x+1}{x-1} = 10\binom{x}{0}$,

f) $\binom{n+1}{n-1} \cdot \binom{n+2}{2} - 9\binom{n+1}{2} + 18 = 0$.

15.9. Určete absolutní člen v rozvoji výrazu: $\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x^3}\right)^{20}$.

15.10. Určete x v rozvoji výrazu $\left(\sqrt[3]{4 - 2x} + \sqrt[6]{3 - 2x}\right)^9$ tak, aby sedmý člen byl roven 168.

15.11. V binomickém rozvoji výrazu $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ nalezněte člen, v němž a,b mají stejný exponent.

15.12. Určete hodnotu třetího reálného členu binomického rozvoje $\left(x-i\sqrt{2}\right)^{10}$, kde $x\in R-\{0\}$. V témž rozvoji vypočtěte $x\in R$ tak, aby sedmý člen rozvoje byl roven (-105).

15.13. V rozvoji výrazu $\left[\left(x\sqrt{x}\right)+\frac{1}{x^4}\right]^n$ je součet prvních tří koeficientů 67. Určete n.

15.14. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybrané dvojciferné číslo bude:
a) sudé,
b) sudé nebo mocnina 2,
c) prvočíslo nebo dělitelné 3.

15.15. Test obsahuje 10 otázek a u každé z nich jsou čtyři odpovědi z nichž je jen jedna správná. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví alespoň na 5 otázek správně, jestliže látku vůbec nezná a odpovědi volí náhodně?

15.16. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěmi kostkami padne součet 7 nebo 8?

15.17. Fotbalista střílí branku z pokutového kopu s pravděpodobností $p=0{,}8$. Vypočtěte pravděpodobnost jevu, že z desíti pokutových kopů promění alespoň osm.

15.18. Elektrotechnický závod používá k montáži finálního výrobku součástky, které nakupuje od tří dodavatelů. První z nich podílí na dodávání množstvím 50%, ale má 8% zmetků. Druhý z nich se podílí 30% a má 6% zmetků. Třetí se podílí 20% a má 1% zmetků. S jakou pravděpodobností je třeba počítat, že náhodně vybraná součástka k montáži je vadná?

15.19. Při zkoušce dostane každý student 30 různých otázek, z nichž si náhodně vybere tři. K úspěšnému absolvování zkoušky je třeba , aby dvě z nich dovedl správně zodpovědět. Jaká je pravděpodobnost, že určitý student, který přistupuje ke zkoušce a zvládl před zkouškou jen 70% otázek, si vytáhne 2 otázky , na něž dovede odpovědět?

15.20. Bylo zjištěno , že ze 40 rodin v jednom domě má 40% auto i chatu. Přitom auto vlastní o 16 rodin než chatu a není rodina, která by neměla chatu nebo auto. Kolik rodin z domu má auto? Kolik rodin má pouze auto? Určete pravděpodobnost, že namátkou vybraná rodina z domu bude vlastnit jen chatu.

16. Posloupnosti a řady

16.1. Určete aritmetickou posloupnost o 10 členech, jejíž součet všech členů je 80 a součet prostředních dvou členů je 16.

16.2. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Určete odvěsny, má-li přepona délku $c=30\,\mathrm{cm}$.

16.3. Určete čísla tvořící část aritmetické posloupnosti, víte-li, že součet prvních čtyř je 68, součet posledních čtyř je 36 a součet všech je 68.

16.4. Strany pravoúhlého trojúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Delší odvěsna je 24. Vypočtěte obvod trojúhelníku.

16.5. Určete čtyři čísla, která jsou 4 po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti a jejichž dekadické logaritmy jsou 4 po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s $d=1$ a součtem 22.

16.6. Určete počet členů geometrické posloupnosti a kvocient, znáte-li $a_1=18$, $a_n=13122$, $s_n=19674$.

16.7. V lese je $4000\,\mathrm{m}^3$ stojatého dříví. Kolik v něm bude za 15 let, je-li roční přírůstek 2% a kácí-li se ročně $200\,\mathrm{m}^3$ dříví? Stav se bere k 31.12..

16.8. V geometrické posloupnosti je součet prvního a čtvrtého členu 18 a součet druhého a třetího členu 12. Vypočtěte součet prvních osmi členů.

16.9. V lese je $91000\,\mathrm{m}^3$ stojatého dříví. Ročně v lese přibývá 2% dříví a kácí se $3000\,\mathrm{m}^3$ dříví.Kolik dříví bude v lese po 12 letech.

16.10. Po kolika letech se zdvojnásobí původní vklad při $n\%$ úrokování ročně?

16.11. Vypočítejte

a) $\left(4\sqrt{3}+8\right)\cdot\left[\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right]=$,

b) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\ldots=,$ c) $\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+\dfrac{n}{2}+\dfrac{n}{4}+\ldots}=.$

16.12. Řešte rovnici:

a) $\sqrt{10\cdot 2^{x}-4}=2^{x}+2^{x-1}+2^{x-2}+\ldots,$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}=\frac{4x-3}{3x-4}.$

17. Komplexní čísla

17.1. Řešte v C: $(2+3i)z+iz=1-i.$

17.2. Vypočtěte $a=(3+2i)-(-1+3i)^{2}+\dfrac{26+13i}{2+3i}$ a určete $\overline{A}$ a $|A|$.

17.3. Pro která reálná x a y je splněna rovnost:

a) $4x(2+i)+y(1-4i)+7=x(3+i)-6y(2i-1)+9i,$

b) $x(1-i)+1=-y+3i.$

17.4. Zjednodušte: $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2}-\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2}=.$

17.5. Převeďte na algebraický tvar, zobrazte v Gaussově rovině, zapište a zobrazte číslo komplexně sdružené k číslu $z=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right).$

17.6. Je dáno komplexní číslo $a=\dfrac{15-5i}{1+2i}-\dfrac{1-3i}{i}+(3+i)(-1+2i).$

Vypočítejte a^{5}.

17.7. Určete

a) $z^{n}-\dfrac{1}{z^{n}}$, je-li $z=\dfrac{3}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$

b) $S=1+x+x^{2}+\ldots+x^{19}$, je-li $x=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}.$

17.8. Vypočítejte $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{6}.$

17.9. Užitím Moivreovy a binomické věty určete $\sin 3\alpha$ a $\cos 3\alpha$ pro $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}.$

17.10. Užitím Moivreovy věty vypočtěte komplexní mocninu D^{6} pro $D=3+3i.$

17.11. Řešte binomickou rovnici v C, kořeny zapište v algebraickém tvaru a zobrazte v Gaussově rovině:

a) $z^{6}-1=0$

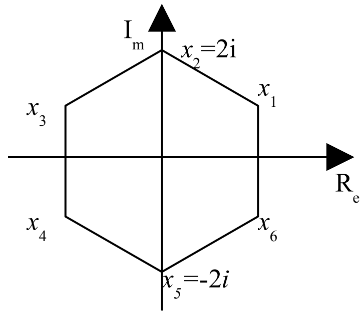
b) $x^{3}-27=0$

c) $35x^{5}+12=0$

d) $x^{5}-1=0$

e) $x^{8}-x^{4}-20=0$

17.12. Určete binomickou rovnici, jestliže všechny její kořeny jsou určeny graficky (kořeny tvoří vrcholy šestiúhelníku, jemuž je opsaná kružnice $r=2$).



18. Výroky a výroková logika

18.1. Vyberte z daných formulí všechny dvojice, které dohromady dávají ekvivalence výroků A a B:
$A\Rightarrow B, A'\Rightarrow B', B\Rightarrow A, B'\Rightarrow A', A'\vee B, A\vee B', A\wedge B, A'\wedge B'.$

18.2. Dokažte, že výroková formule je kontradikcí:
$(p\Leftrightarrow q)\wedge[(p\wedge q')\vee(p'\wedge q)].$

18.3. Přesvědčete se, že platí výroková formule $\left(\overline{A\Rightarrow B}\right)\Leftrightarrow\left(A\wedge\overline{B}\right)$ a aplikujte platnost této výrokové formule pro tvrzení: „Není pravda, že je-li trojúhelník rovnoramenný, pak je rovnostranný.

18.4. Utvořte konjunkci negací těchto tvrzení: $x>5, x<5$. Které číslo splňuje tuto konjunkci?

18.5. Formulujte v logické symbolice: „Jestliže C plyne z A a jestliže z B plyne C, pak C plyne z A nebo B“.Dokažte, že se jedná o tautologii.

18.6. Zjistěte, zda daná výroková formule je tautologií: $\left(\overline{A}\vee\overline{B}\right)\Leftrightarrow\overline{A\wedge B}.$

19. Důkazy

19.1. Dokažte matematickou indukcí

a) $4 / [n^2 + (n+1)^2 - 1]$,

b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots n \cdot n! = (n+1)! - 1$,

c) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

19.2. Dokažte

a) platnost binomické věty,

b) $\sqrt{2}$ je iracionální číslo,

c) pro každé $n \in N$ je číslo $5^{n+1} + 6^{2n-1}$ dělitelné číslem 31,

d) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$